

Egy feladat a szögfelezők hosszáról

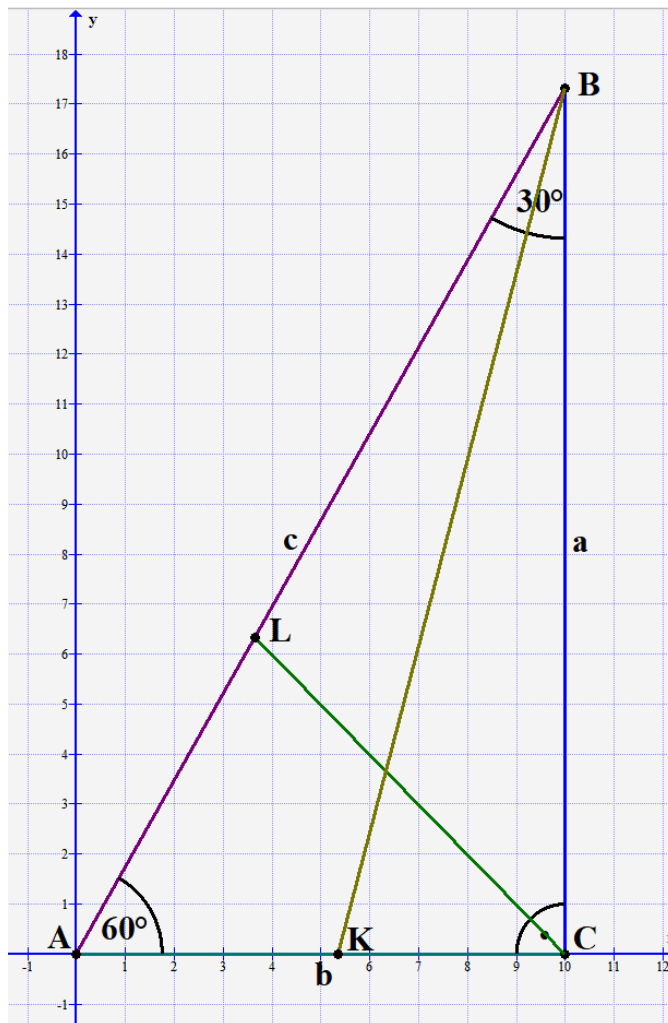
Az [1] forrásban találkoztunk egy (orosz) 8. osztályosoknak szánt versenyfeladattal. Most erről lesz szó.

A feladat

Mutassuk meg, hogy egy $30^\circ / 60^\circ / 90^\circ$ - os derékszögű háromszögben az egyik szögfelező hossza fele egy másikénak!

A megoldás

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Itt könnyen eldönthetően adódik, hogy az arany és a zöld szögfelezők hosszát kell vizsgálni.

A **BK** arany szögfelező hossza:

$$\overline{BK} = \frac{a}{\cos 15^\circ} . \quad (1)$$

A **CL** zöld szögfelező hosszához szinusz-tétellel:

$$\frac{\overline{CL}}{b} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin[180^\circ - (60^\circ + 45^\circ)]} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \rightarrow \overline{CL} = b \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} . \quad (2)$$

Ámde:

$$b = a \cdot \operatorname{tg} 30^\circ , \quad (3)$$

így (2) és (3) szerint:

$$\overline{CL} = a \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = a \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = a \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = a \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} = a \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\cos 15^\circ} ,$$

innen:

$$\overline{CL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\cos 15^\circ} . \quad (4)$$

Most (1) és (4) összevetéséből:

$$\underline{\underline{\overline{CL} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BK}}} . \quad (5)$$

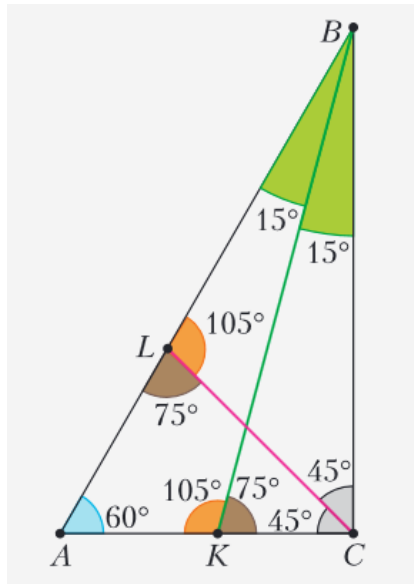
Az (5) eredmény már a feladat állítását adja.

Megjegyzések:

M1. Ezt a feladatot [1] - ben jellemzően nem számítással oldották meg, többféleképpen is.

M2. Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó határozza meg az itt nem vizsgált harmadik szögfelező hosszát is! Ez könnyen megy, hiszen a háromszög belső szögeinek felező egyenesei egy pontban metszik egymást. Amúgy meg mi is ez a pont?

M3. Meglepő, de a feladat állítása újszerűnek hatott számunkra. Ugyanis az ember azt hi - hetné, hogy az egyik leggyakoribb – vonalzóként is megjelenő – háromszögről már nagy - jából mindent tudhat. De nem. Kétségtelen, hogy a szóban forgó háromszög nagyon spe - ciális – 2. ábra. Itt nem jelölték, de a szögfelezők is $60^\circ / 120^\circ$ - os szöget zárnak be egy - mással.



2. ábra – forrása: [1]

M4. Az 1. ábrán is megfigyelhető, hogy a szögfelező egyenesek a szöggel szemközi oldalt általában **nem felezik**. Erről korábban már többször is szó volt.

Forrás:

[1] – ekvant-23-05.pdf (mccme.ru)

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2023. 11. 27.

Továbbiak: www.galgoczi.net